線型代数を訪ねてみると

中部大学 工学部/AI 数理データサイエンスセンター

岡村 和弥

E-mail: k.okamura.renormalizable@gmail.com

ベクトル・行列を駆使する数学である線型代数は，20 世紀初頭に公理化されたところから高等教育（大学教育）の標準的カリキュラムの 1 つになり，物理・工学から統計や情報処理技術など至る所で利用されるまで大出世した体系である。それゆえ,（数理的な解析が必要な）研究者なら知っていて「当たり前」の扱いをされ，少々軽んじられる感はあるが，関連する数学や語る文脈によってはその「特殊性」も味わい深いものがある。それは決して完成した（終わった）理論ではないのである。

m, n を自然数とするとき，各成分が複素数に値を取る $m \times n$ 行列の集合 $M_{m,n}(\mathbb{C})$ は，左 $M_m(\mathbb{C})$-右 $M_n(\mathbb{C})$ 加群である（$M_m(\mathbb{C}) = M_{m,m}(\mathbb{C})$，$M_n(\mathbb{C}) = M_{n,n}(\mathbb{C})$）。すなわち，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である $M_{m,n}(\mathbb{C})$ は，任意の $A \in M_m(\mathbb{C}), V, V_1, V_2 \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ および $B \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，

$$A(V_1 + V_2) = AV_1 + AV_2, \quad (V_1 + V_2)B = V_1B + V_2B, \quad A(VB) = (AV)B \tag{1}$$

などを満たす。これは代数学における両側に代数が作用する加群（module）の基本的な例であり，正方行列とはまた違う様相にあふれる数学的対象である。$V_1, V_2 \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ に対し，

$$\langle V_1|V_2\rangle = V_1^* V_2 \tag{2}$$

で定義される $M_{m,n}(\mathbb{C})$-値内積をもつ [1]（V_2^* は V_2 の随伴行列）。すなわち，$\langle\cdot|\cdot\rangle$ は任意の $V, V_1, V_2 \in M_{m,n}(\mathbb{C}), B \in M_n(\mathbb{C})$ および $A \in M_m(\mathbb{C})$ に対し，

(i) $\langle V|V\rangle \geq O_n$. $\langle V|V\rangle = O_n$ と $V = O_{m,n}$ は必要十分。

(ii) $(\langle V_1|V_2\rangle)^* = \langle V_2|V_1\rangle$. (iii) $\langle V|V_1 + V_2\rangle = \langle V|V_1\rangle + \langle V|V_2\rangle$.

(iv) $\langle V_1|V_2B\rangle = \langle V_1|V_2\rangle B$. ((v) $\langle V_1|A^*V_2\rangle = \langle AV_1|V_2\rangle$.)

という性質を満たす。ただし，$O_{m,n}$ および O_n はそれぞれ (m, n) 型，(n, n) 型の零行列である。正定値性（非負定値）がある代数系に値を取る場合に，内積の概念は拡張されるのである。そして，線型写像 $T : M_m(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ が正値（positive）であるとは，任意の非負行列（自己共役で非負固有値をもつ行列を）$A \in M_m(\mathbb{C})$ を非負行列 $T(A) \in M_n(\mathbb{C})$ にうつすことをいう。$M_m(\mathbb{C})$ から $M_n(\mathbb{C})$ への線型写像において，正値性よりつよい条件が知られている。それは完全正値性（completely positive）である [2]。線型写像 $T : M_m(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ が完全正値であるとは，任意の自然数 $l, A_1, \cdots, A_l \in M_m(\mathbb{C})$ および $B_1, \cdots, B_l \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，

$$\sum_{i,j=1}^{l} B_i^* T(A_i^* A_j) B_j \geq O_n \tag{3}$$

を満たすことをいう。この条件は，有限集合 $\{V_k\}_1^p \subset M_{m,n}(\mathbb{C})$ で

$$T(A) = \sum_{k=1}^{p} V_k^* A V_k = \sum_{k=1}^{p} \langle V_k|AV_k\rangle, \quad A \in M_m(\mathbb{C}) \tag{4}$$

を満たすものが存在することと等価である（$\langle V_k|AV_k\rangle$ は上で定義した $M_{m,n}(\mathbb{C})$-値内積）。完全正値写像は，量子状態を量子状態にうつす写像のクラスとして量子測定理論をはじめ量子情報において基本的役割を果たしている。更には，$M_{m,n}(\mathbb{C})$ は，Jordan 三重積

$$\{V_1, V_2, V_3\} = V_1 V_2^* V_3 + V_3 V_2^* V_1 \tag{5}$$

という非結合的な積演算で閉じており，非結合代数の具体例としても無視できない対象である [3]。連立一次方程式の係数行列・拡大係数行列や線型作用素の行列表示でなくとも，そして正方行列に限らずとも，一般の行列（$m \times n$ 行列）は数学的に非自明な対象として大いに活躍するのである。

正方行列の集まり $M_n(\mathbb{C})$ を一例とみなせる枠組みとして，作用素代数（operator algebra）[4] は線型代数に関する知見を深めるためにも大いに役に立つと考える。なぜなら，量子論の数学的基盤を与えるものであり，作用素に対する数学的解析をするにあたり，Hilbert 空間上の有界線型作用素の構造と整合的な代数系の性質が個々の作用素の解析にも影響を及ぼすからである。

では，作用素代数の重要なクラスである von Neumann 代数についてみていこう。$M_n(\mathbb{C})$ の射影作用素 P と $\mathbb{C}^n$ の線型部分空間 M の間には一対一対応が存在する。この一対一対応は，ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ において，$\mathcal{H}$ 上の射影作用素と $\mathcal{H}$ の閉部分空間の間の一対一対応に拡張される。特に，この一対一対応により，射影作用素 P は一対一対応する $\mathcal{H}$ の閉部分空間 M の次元（M の基底の濃度）を反映する。個々の射影作用素は $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素であるから，この事実からは逃れられない。しかし，

「どの von Neumann 代数に属するものであるか？」

を一度問われれば，まるで意味が変わってしまうことが知られている。それが von Neumann 代数の奥深さとつながっている。

ある Hilbert 空間の有界線型作用素の集合 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 $\mathcal{M}$ が（$\mathcal{H}$ 上の）von Neumann 代数であるとは，$\mathcal{M}$ が恒等作用素 I を含む随伴 $A \mapsto A^*$ で閉じた代数（$*$-代数）であって次の条件を満たすときをいう：

$$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}. \tag{6}$$

ここで，$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 S に対し，

$$S' = \{A \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \mid \forall B \in S,\ AB = BA\} \tag{7}$$

を S の可換子（commutant），$S'' = (S')'$ を S の第二可換子（double commutant）と呼ぶ。つまり，$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の部分 $*$-代数であって自身と第二可換子が一致するものが von Neumann 代数である。特に，$\mathbb{B}(\mathcal{H})$ 自身が von Neumann 代数である。今後は簡単のため，考える von Neumann 代数は因子（factor）である，すなわち $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}I$ であると仮定する（von Neumann 代数の中心が自明であるという仮定）。

ある von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ の射影作用素の集合 $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ 上には**次元関数** (dimension function) という関数 が定義される。$d : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to [0, \infty]$ が次元関数であるとは以下の条件をみたすときをいう：

(1) $d(P) = 0$ と $P = 0$ は必要十分。

(2) $P \sim Q$ と $d(P) = d(Q)$ は必要十分，$P \prec Q$ と $d(P) \leq d(Q)$ は必要十分である。

(3) P と Q が互いに直交するとき，$d(P + Q) = d(P) + d(Q)$.

ここで，$P \sim Q$ とは，2 つの $\mathcal{M}$ の射影作用素 P, Q に対し，$W \in \mathcal{M}$ で $W^*W = P$ および $WW^* = Q$ となるもの（部分等長作用素）が存在するときをいう。そして，$P \prec Q$ とは，$P \sim P'$ および $P' \leq Q$ となる $P' \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ が存在するときをいう。$d(P)$ を P の次元と呼ぶ。これは，一旦 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ が定義されている Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のことは「忘れて」、$\mathcal{M}$ での部分等長作用素による射影作用素同士の関係をもとに「次元」というものを改めて考えるという発想に基づいている。次元関数の値域がどうなるかで von Neumann 代数が分類される：

(1) I_n 型（$n \in \mathbb{N}$）：$\{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1\}$. $M_n(\mathbb{C})$ を考えているときに対応する。値は $M_n(\mathbb{C})$ の射影作用素 P に対し，対応する線型部分空間の次元を n で割ったものである。

(2) I_∞ 型：$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. 無限次元 Hilbert 空間上の射影作用素の全体の場合に対応（本来は Hilbert 空間の次元ごとの更に細かい分類がある）

(3) II_1 型：$[0, 1]$.

(4) II_∞ 型：$[0, \infty]$. II_1 型と I_∞ 型の（von Neumann 代数としての）テンソル積で得られる。

(5) III 型：$\{0, \infty\}$

I_n 型と I_∞ 型は Hilbert 空間の射影作用素の全体の場合で，行列と Hilbert 空間論の直接の帰結である。I_n 型と II_1 型はあわせて有限型と呼ばれる。とくに後者は von Neumann 代数の理論においてはじめて登場した対象であり，次元が $[0, 1]$ の連続無限個存在する状況である。これにあわせて I_n 型での次元を正規化しているのであるが，$[0, 1]$ を埋め尽くすように射影作用素が存在するには無限次元 Hilbert 空間の助けを借りるほかないのである。けれども，Hilbert 空間論での次元は離散的なものであるため，von Neumann 代数を介した Hilbert 空間の閉部分空間の間の関係性には連続的になりうる状況があるという von Neumann 代数の概念なしには成立しない描像である。II_∞ 型はその状況と I_∞ 型とかけあわせる（テンソル積をする）ことで値域を $[0, \infty]$ へ広げたものと解釈される。一方，III 型はこれまでの状況とは一線を画す。0 でないどの射影作用素 P, Q も部分等長作用素によってつながる状況（$P \sim Q$）が III 型である。これは，

「(0 でない）部分は全体と常に等しい」

と呼ぶにふさわしい事態が生じているのである。von Neumann 代数を研究する目的として，von Neumann 代数の射影作用素の集合の性質を調べたいという動機は理論のはじまりから当然意識され，それを裏付けるように論文中では頁数を使い明晰に解析されている。

作用素代数のなかには，von Neumann 代数より広いクラスである C^*-代数があり，C^*-代数の間の完全正値写像（定義は $M_m(\mathbb{C})$ から $M_n(\mathbb{C})$ への場合と同様）は理論の主要な研究対象となっている。$M_m(\mathbb{C})$ から $M_n(\mathbb{C})$ への完全正値写像のようにはっきりと表示がきまる状況ばかりではないが，Hilbert 加群という概念によって（C^*-代数に値をとる内積による）類似の表示が得られる。$M_{m,n}(\mathbb{C})$ はこの文脈からすると von Neumann 加群の一例という扱いが妥当であろう。2 つの Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ の直和 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ 上の有界線型作用素の集合は次のような行列表示に分解される：

$$\mathbb{B}(\mathcal{K} \oplus \mathcal{H}) = \begin{pmatrix} \mathbb{B}(\mathcal{K}) & \mathbb{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \\ \mathbb{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H}) & \mathbb{B}(\mathcal{H}) \end{pmatrix} \tag{8}$$

非対角項にあたる $\mathbb{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への有界線型作用素の集合である。$\mathcal{V}$ が von Neumann 加群であるとは，Hilbert 空間 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ 上のある von Neummann 代数 $\mathcal{M}$ と非対角項の集合 $\mathbb{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ の

共通部分であることをいう。作用素代数を経て行列およびその集合 $M_{m,n}(\mathbb{C})$ の扱いは大きく転換されるのである。量子場の局所観測可能量の代数は III 型 von Neumann 代数であることが知られており，von Neumann 代数と量子場をともに研究する意義は大変大きい。けれども，位相構造や（確率論をするための）測度論的な話を除けば，線型代数の延長上で von Neumann 代数を扱えるようにする試みのほうが得られることが遥かに多いように感じている。超準解析を用いた行列代数としての II_1 型 von Neumann 代数の構成 [5] はその直感を支える成果だと理解している。

参考文献

[1] M.A. Rieffel, Morita equivalence for C^*-algebras and W^*-algebras, J. Pure Appl. Algebra **5** (1974), 51–96.

[2] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, (Cambridge UP, Cambridge, 2002).

[3] O. Loos, Jordan triple systems, *R*-spaces, and bounded symmetric domains, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 558–561 (1971).

[4] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, (Springer, Berlin, 1979).

[5] T. Hinokuma and M. Ozawa. Conversion from nonstandard matrix algebras to standard factors of type II_1, Illinois J. Math. **37** (1993), 1–13.